Γραμμική ΙΙ

10/5/2019

<u>Πρόταση</u>: Ο πίνακας μετάβασης μεταξύ ΟΚΒ ενός Ευκλείδειου χώρου είναι ορθογώνιος. Αντίστροφα, κάθε ορθογώνιος πίνακας είναι πίνακας μετάβασης μεταξύ ΟΚΒ.

<u>Απ</u>: Έστω $\beta=\{\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}\}$, $e=\{\vec{\varepsilon_1},\dots,\vec{\varepsilon_n}\}$ ΟΚΒ του Ευκλείδειου χώρου E.

Έστω $A=M^{e}_{\beta}=(a_{ij})$. Τότε θα έχουμε ότι: $\vec{\varepsilon_i}=\sum_{\lambda=1}^{n}a_{\lambda i}\vec{e_\lambda}$, $\vec{\varepsilon_j}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\vec{e_k}$, $1\le i,j\le n$

$$\delta_{ij}=\langle\vec{\varepsilon_i},\vec{\varepsilon_j}\rangle=\left\langle\sum_{\lambda=1}^{n}a_{\lambda i}\vec{e_\lambda},\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\vec{e_k}\right\rangle=$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{\lambda i}a_{kj}\overbrace{\langle\vec{e_\lambda},\vec{e_k}\rangle}^{\delta_{\lambda k}}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj},\ \forall i,j=1,\dots,n\Rightarrow$$

$\Rightarrow A$: ορθογώνιος.

Αντίστροφα, έστω $A\in M_n(\mathbb{R})$ ένας ορθογώνιος πίνακας και $(E,\langle,\rangle)$ Ευκλείδειος χώρος με $\dim_{\mathbb{R}}E=n$.

Έστω $\beta=\{\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}\}$: ΟΚΒ του E. Για κάθε $j=1,\dots,n$ θέτουμε:

$(*)\ \boxed{\vec{\varepsilon_j}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\vec{e_k}}$. Έστω $\vec{\varepsilon_i}=\sum_{\lambda=1}^{n}a_{\lambda i}\vec{e_\lambda}$ και τότε:

$$\langle\vec{\varepsilon_i},\vec{\varepsilon_j}\rangle=\left\langle\sum_{\lambda=1}^{n}a_{\lambda i}\vec{e_\lambda},\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\vec{e_k}\right\rangle=\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{\lambda i}a_{kj}\overbrace{\langle\vec{e_\lambda},\vec{e_k}\rangle}^{\delta_{\lambda k}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}\overset{A:\ \text{ορθογώνιος}}{=\!=\!=}\delta_{ij},\ \forall i,j=1,\dots,n$$ και άρα

$e=\{\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\dots,\vec{\varepsilon_n}\}$: ΟΚΒ του E. Τότε οι σχέσεις $(*)$, δείχνουν ότι $M^{e}_{\beta}=A$.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ 2x2 ΠΙΝΑΚΕΣ

Έστω $A=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}$ ένας ορθογώνιος πίνακας πραγματικών αριθμών. Τότε: ${}^{t}A=A^{-1}\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\ \beta&\delta\end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}\delta&-\beta\\ -\gamma&\alpha\end{pmatrix}=\frac{1}{\pm1}\begin{pmatrix}\delta&-\beta\\ -\gamma&\alpha\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\boxed{\begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\ \beta&\delta\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}\delta&-\beta\\ -\gamma&\alpha\end{pmatrix}}$$

<u>1η περίπτωση</u>: $|A| = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \delta \\ \text{και} \\ \gamma = -\beta \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow \exists!\, \theta \in [0, 2\pi) : \alpha = \cos(\theta),\ \beta = \sin(\theta)$

Άρα: $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\cos(\theta) = \dfrac{\alpha + \delta}{2}$

<u>2η περίπτωση</u>: $|A| = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\delta \\ \gamma = \beta \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow \exists!\, \theta \in [0, 2\pi) : \alpha = \cos(\theta),\ \beta = \sin(\theta)$

Άρα $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$

<u>Γεωμετρική ερμηνεία 2x2 ορθογώνιων πινάκων</u>

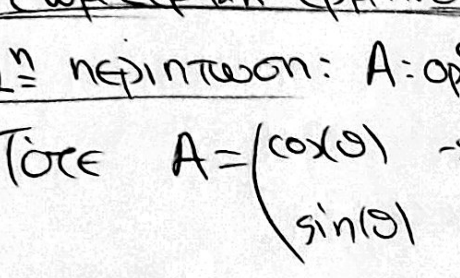
<u>1η περίπτωση</u>: A: ορθογώνιος με ορίζουσα $|A| = 1$

Τότε $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_A(x) = Ax$

Άρα $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, τότε $f_A(x) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow f_A(x) = \begin{pmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{pmatrix}$



$x' = x\cos(\theta) - y\sin(\theta)$
$y' = x\sin(\theta) + y\cos(\theta)$

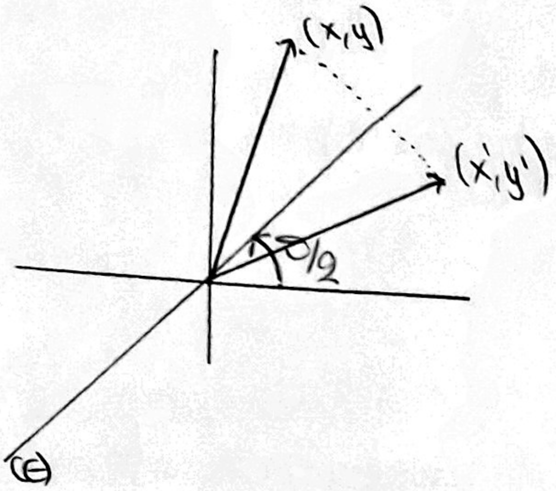
Άρα, κάθε ορθογώνιος 2x2 πίνακας A με ορίζουσα 1, παριστάνει στροφή επιπέδου κατά γωνία θ, όπου $\cos(\theta) = \dfrac{Tr(A)}{2}$

2η περίπτωση: A: ορθογώνιος με ορίζουσα $|A|=-1$. Τότε:

$A=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}$. Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f_A:\mathbb{R}_2\to\mathbb{R}_2$

$f_A(X)=AX$. Αν $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, τότε $f_A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos(\theta)+y\sin(\theta)\\ x\sin(\theta)-y\cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{matrix}\to x'\\ \to y'\end{matrix}$$



Άρα κάθε ορθογώνιος 2×2 πίνακας A με ορίζουσα $|A|=-1$ παριστάνει συμμετρία ως προς ευθεία (ε), η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία $\theta/2$ με τον άξονα των x.

→ θα έχει ιδιοτιμές το 1 και το -1

• Έστω A: ορθογώνιος πίνακας με $|A|=-1$, έστω $A=\begin{pmatrix}a & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$. Τότε:

$A=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}$ και τότε $P_A(t)=\begin{vmatrix}\cos(\theta)-t & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)-t\end{vmatrix}=$

$$=-\cos^2(\theta)-\cancel{\cos(\theta)\cdot t}+\cancel{\cos(\theta)\cdot t}+t^2-\sin^2(\theta)=-1+t^2\Rightarrow P_A(t)=t^2-1$$

Άρα, οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda=1$ και $\lambda_2=-1$, και άρα ο A είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα είναι όμοιος με τον πίνακα $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

Έστω $x\in\mathbb{R}_2$, $AX=X$.

↳ ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=1$.

Θέτουμε $E_1=\frac{X}{\|X\|}\in\mathbb{R}_2$. Έστω $\vec{E_2}$: το αντίστοιχο διάνυσμα στο $\mathbb{R}^2$. Τότε, η ισομετρία $f_A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f_A(x,y)=(x\cos(\theta)+y\sin(\theta), x\sin(\theta)-y\cos(\theta))$

Έχει το $\vec{e_1}$ ως ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή,
δηλαδή $f_A(x,y) = (x,y)$, όπου $\vec{e_1} = (x,y)$

Θέτουμε $V = 0$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$, ο οποίος παράγεται από το $\vec{e_1}$.
Τότε $f_A(\vec{x}) = \vec{x}, \forall \vec{x} \in V$. Τότε, ο υπόχωρος V είναι ο <u>άξονας συμμετρίας</u> (ε). Για τη γωνία $\theta/2$: $\boxed{\frac{\theta}{2} = \frac{\text{Arcos}(a)}{2}}$

• Έστω A: ορθογώνιος πίνακας με $|A|=1$, έστω $A=\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Τότε

$\exists! \theta \in [0, 2\pi) : A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \cos(\theta) = \frac{Tr(A)}{2}$

Τότε $P_A(t) = \begin{vmatrix} \cos(\theta)-t & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta)-t \end{vmatrix} = \cos^2(\theta)+t^2-2\cos(\theta)\cdot t+\sin^2(\theta) =$

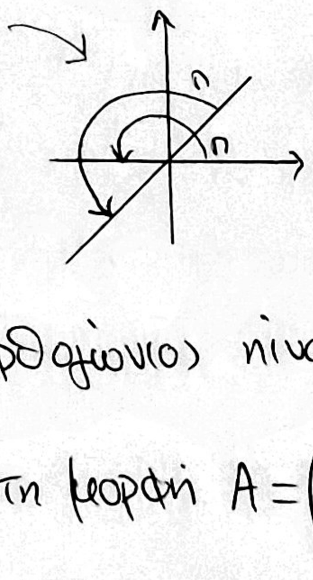
$= t^2 - 2\cos(\theta)\cdot t + 1$

$\Delta = 4\cos^2(\theta)-4$. Άρα για να έχει ο πίνακας A πραγματικές ρίζες $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 4\cos^2(\theta)-4 \geq 0 \Rightarrow \cos^2(\theta) \geq 1 \Rightarrow \cos^2(\theta) = 1 \Rightarrow \theta = 0$
ή $\theta = \pi$.

Αν $\theta = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ μηδενική στροφή

Αν $\theta = \pi \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$



Έστω $A = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ένας ορθογώνιος πίνακας.

1. $|A|=1$. Τότε ο A έχει τη μορφή $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, για μια μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ και ο A παριστάνει στροφή επιπέδου κατά γωνία θ, όπου $\cos(\theta) = \frac{Tr(A)}{2}$.

② $|A| = -1$ τότε ο A έχει τη μορφή $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$,

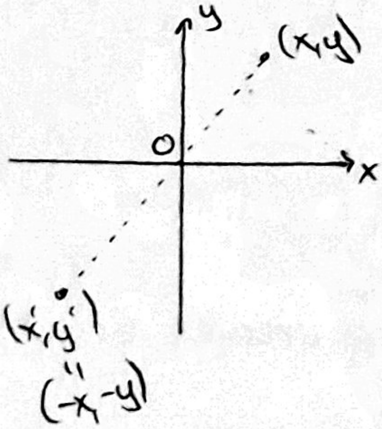
για μια μοναδική γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$, όπου $\frac{\theta}{2} = \frac{Arccos(a)}{2}$ και ο A παριστάνει συμμετρία επιπέδου ως προς άξονα (ε) ο οποίος περνάει από το O και σχηματίζει γωνία $\theta/2$ με τον άξονα των x. Επίσης, ο A είναι διαγωνοποιήσιμος με ιδιοτιμές του A είναι $1, -1$ και ο άξονας (ε) ορίζεται από τον υπόχωρο $V(1)$: ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1.

Έστω $\vec{e}_1$: ΟΚΒ του $V(1)$ και $\vec{e}_2$: ΟΚΒ του $V(-1)$ και τότε $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ΟΚΒ του $\mathbb{R}^2$ και αν θέσουμε $P = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, τότε P: ορθογώνιος και

$$^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

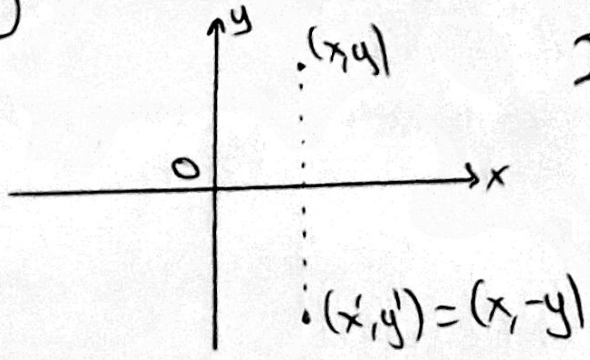
<u>Ειδικές Περιπτώσεις:</u>

①



Συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων, δηλ. στροφή επιπέδου κατά γωνία $\theta = \pi$ και $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

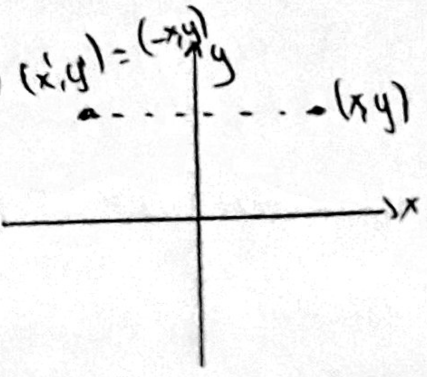
②



Συμμετρία ως προς τον άξονα των x

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

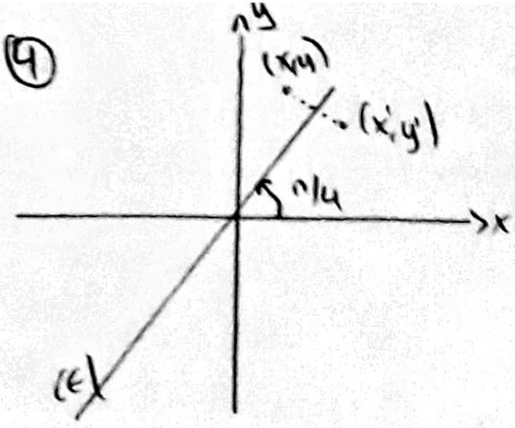
③



Συμμετρία ως προς τον άξονα των y

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

④



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Άσκηση</u>: Να συμπληρωθεί ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ * & * \end{pmatrix}$ σε έναν ορθογώνιο πίνακα, και να βρεθεί η γεωμετρική του ερμηνεία.

<u>Λύση</u> Επειδή $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$, ο A μπορεί να συμπληρωθεί σε έναν ορθογώνιο πίνακα. Έστω ότι η δεύτερη γραμμή του A είναι η $(x \;\; y)$. Τότε $x^2 + y^2 = 1$ και $x\frac{1}{\sqrt{5}} + y\frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x \;\; y) = (2/\sqrt{5} \;\; -1/\sqrt{5}) \\ (x \;\; y) = (-2/\sqrt{5} \;\; 1/\sqrt{5}) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

↳ $|A| = 1$ ↳ $|A| = 1$.

① Έστω $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Επειδή $|A| = 1$, ο A παριστάνει στροφή επιπέδου κατά γωνία θ, όπου $\cos(\theta) = \frac{2/\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, και άρα θ είναι η μοναδική γωνία στο $[0, 2\pi)$ έτσι ώστε $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ και τότε

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

② Έστω $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Επειδή $|A| = -1$, ο A παριστάνει συμμετρία ως προς άξονα (ε), ο οποίος σχηματίζει γωνία $\theta/2$ με τον άξονα των x.

Τότε $\frac{\vartheta}{2} = \frac{Arcos(1/\sqrt{5})}{2}$

Γνωρίζουμε ότι ο A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$

• Για $\lambda_1 = 1$: $AX = X \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$

$V(1) = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R} \right\}$. Τότε το διάνυσμα $\dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}}{\left\| \begin{matrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{matrix} \right\|} = \begin{pmatrix} 2/(5-\sqrt{5}) \\ \sqrt{5}-1/5-\sqrt{5} \end{pmatrix}$ „E_1"

είναι ΟΚΒ του $V(1)$. και άρα ο άξονας συμμετρίας στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ είναι ο υπόχωρος $V(1) = \left\{ x\left(\frac{2}{5-\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}-1}{5-\sqrt{5}}\right) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R} \right\}$

Παρόμοια, βλέπουμε ότι το διάνυσμα $E_2 = \begin{pmatrix} 2/(5+\sqrt{5}) \\ (1+\sqrt{5})/(5+\sqrt{5}) \end{pmatrix}$: ΟΚΒ του $V(-1)$

Τότε θέτοντας $P = \begin{pmatrix} 2/5-\sqrt{5} & 2/5+\sqrt{5} \\ \sqrt{5}-1/5-\sqrt{5} & -1+\sqrt{5}/5+\sqrt{5} \end{pmatrix}$ αποκτάμε έναν

ορθογώνιο πίνακα P: ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ 3x3 ΠΙΝΑΚΕΣ

Έστω A ορθογώνιος 3x3 πίνακας. Τότε $|A| = \pm 1$ και αν λ είναι μια πραγματική ιδιοτιμή, τότε $\lambda = \pm 1$

Ισχυρισμός: Ο A έχει (τουλάχιστον) μια πραγματική ιδιοτιμή λ. Πράγματι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι βαθμού 3 και άρα το $P_A(t)$ θα πρέπει να έχει μια πραγματική ρίζα (διότι έχει πάντα μιγαδικές ρίζες και αν $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ρίζα του $P_A(t)$, τότε και η $\bar{\lambda}$ είναι ρίζα του $P_A(t)$)

Άρα ο A έχει μια τουλάχιστον πραγματική ιδιοτιμή λ και τότε

$\lambda = 1$ ή $\lambda = -1$

Έστω $\vec{e_1}$ μια ορθοκανονική βάση του $V(\lambda)$. Τότε $A\vec{e_1} = \lambda\vec{e_1}$

Θεωρούμε την ισομετρία $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ την οποία ορίζει ο πίνακας A,
δηλαδή $f_A(x,y,z) = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Τότε $f_A(\vec{e_1}) = \lambda\vec{e_1}$

Θεωρούμε τον ορθογώνιο υπόχωρο $V(\lambda)^{\perp} = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x},\vec{y}\rangle = 0, \forall \vec{y}\in V(\lambda)\}$

$= \{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{e_1},\vec{x}\rangle = 0\}$. Τότε $\mathbb{R}^3 = V(\lambda)\oplus V(\lambda)^{\perp} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V(\lambda)^{\perp} = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3 - \dim_{\mathbb{R}} V(\lambda) = 3-1 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V(\lambda)^{\perp} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ο Ευκλείδειος χώρος $V(\lambda)^{\perp}$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^2$

$\forall \vec{x}\in V(\lambda)^{\perp}: f_A(\vec{x})\in V(\lambda)^{\perp}$, διότι: $\langle \vec{y}, f_A(\vec{x})\rangle$, όπου $\vec{y}\in V(\lambda) \Rightarrow \vec{y} = \kappa\vec{e_1} \Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \kappa\vec{e_1}, f_A(\vec{x})\rangle = \kappa\langle \vec{e_1}, f_A(\vec{x})\rangle = \kappa\langle f_A(\vec{e_1})\cdot\frac{1}{\lambda}, f_A(\vec{x})\rangle =$

$= \frac{\kappa}{\lambda}\langle f_A(\vec{e_1}), f_A(\vec{x})\rangle \overset{f_A \text{ ισομετρία}}{=} \frac{\kappa}{\lambda}\langle \vec{e_1}, \vec{x}\rangle = 0$

Άρα, $f_A(x)\in V(\lambda)^{\perp}$